

АСПАН МЕХАНИКАСЫ

*Дәріскер
ф.-м.ғ.к., асс.профессор Алимгазина Н.Ш.*

7-дәріс. Жанасатын элементтерді анықтау

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{F} \quad (4.1)$$

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad (4.2)$$

$$\vec{F} \ll \frac{\mu}{r^2}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i \\ \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i \\ \sin u \sin i \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad u = \omega + \nu, \quad \int_0^\nu \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (4.4)$$

4.1 Жанасатын элементтер әдісі (кіші параметр әдісі)

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) \text{ және } \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0) \quad (4.5)$$

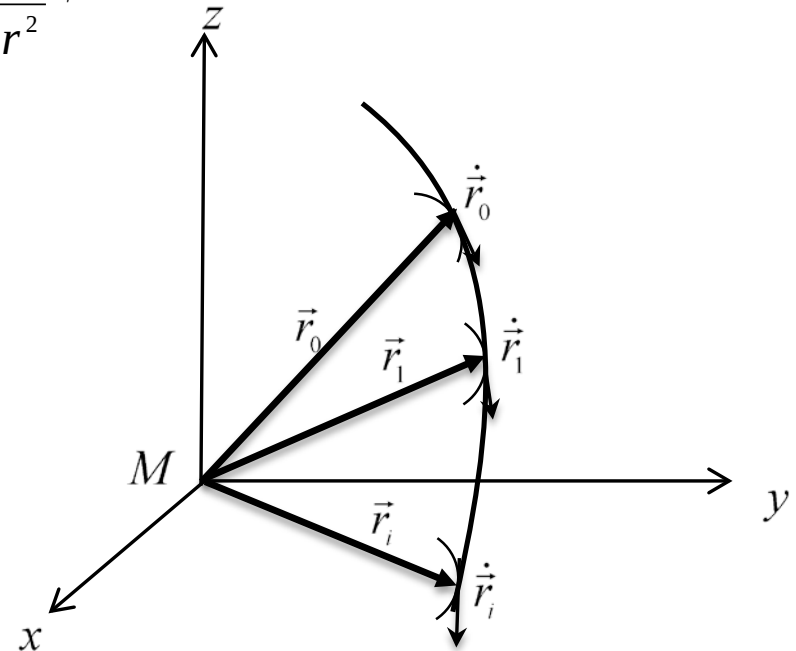
$$t_0 - \Delta t < t < t_0 + \Delta t$$

$$F \ll \frac{\mu}{r^2} ,$$

$$t_1 = t_0 + 2\Delta t$$

$$t_0 < t < t_n$$

$$t_k - \Delta t < t < t_k + \Delta t$$



$$\frac{dE_i}{dt} = \Phi_i(t, E_j(t)), \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.6)$$

Егер функция $\Psi(t, \vec{r}(t, E_i), \dot{\vec{r}}(t, E_i)) = C$ (4.2) ұйытқысыз қозғалыс теңдеуінің алғашқы интегралы болса, сонда $\Psi(t, \vec{r}(t, E_i(t)), \dot{\vec{r}}(t, E_i(t))) = C$ (4.1) ұйытқымалы қозғалыс теңдеуінің алғашқы интегралы болады.

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dots = 0, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dots + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{x}} F_x + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{y}} F_y + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{z}} F_z = 0. \quad (4.8)$$

1.1.1 Жанасатын элементтер үшін Лагранж теңдеулері

$$\Omega = \beta_3, \quad \omega = \beta_2, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \quad \tau = -\beta_1; \quad (4.9)$$

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}. \quad (4.11)$$

Ұйытқысыз қозғалыстың гамильтон функциясы H_0 - α_i, β_i элементтерінің тұрақты шамаларын береді, сондықтан

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \quad (4.12)$$

Осы теңдеудегі жанасатын Якоби элементтерінен жанасатын Кеплер элементтеріне ауысу қажет. Сонда

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\beta_3}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\beta_2}{dt}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\beta_1}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad (4.13a)$$

$$\sin i \frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_3}{dt} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{p}{\mu e} \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}. \quad (4.13\text{ә})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = -\frac{\partial R}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_3} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad (4.14a)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -\frac{\mu(e^2 - 1)}{2p^2} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{\mu e}{p} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (4.14\text{ә})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos i \frac{\partial R}{\partial p} - \sqrt{\mu p} \sin i \frac{\partial R}{\partial i}. \quad (4.14\text{б})$$

Сонда жанасатын кеплер элементтері үшін дифференциалдық теңдеулер - *Лагранж теңдеулері* анықталады

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad \frac{dp}{dt} = 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (4.15a)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (4.15\text{ә})$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial \tau}. \quad (4.15\text{б})$$

Бұл теңдеулерді кез-келген жанасатын қозғалыс үшін қолдануға болады. Алғашқы дәуір үшін орташа бойлығы мен перицентр бойлығы

$$\varepsilon = \pi + M_0, \quad \pi = \Omega + \omega \quad (4.16)$$

және

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, \quad p = a(1 - e^2) \quad (4.17)$$

теңдеулерін қолданып, эллипстік элементтер үшін теңдеулерді алуға болады.

Сонда эллипстік жанасатын элементтер үшін Лагранж теңдеулері

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad (4.18a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad (4.18a)$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (4.18b)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \quad (4.18b)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial e}. \quad (4.18\Gamma)$$

1.1.1 Жанасатын элементтер үшін Ньютон теңдеулері

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, Y = \frac{\partial R}{\partial y}, Z = \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial R}{\partial E} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial E} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial E} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial E} = X \frac{\partial x}{\partial E} + Y \frac{\partial y}{\partial E} + Z \frac{\partial z}{\partial E}. \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial x}{\partial E} = \alpha \frac{\partial r}{\partial E}, \frac{\partial y}{\partial E} = \beta \frac{\partial r}{\partial E}, \frac{\partial z}{\partial E} = \gamma \frac{\partial r}{\partial E} \quad (4.21)$$

және Ω, ω, i элементтері үшін

$$\frac{\partial x}{\partial E} = r \frac{\partial \alpha}{\partial E}, \frac{\partial y}{\partial E} = r \frac{\partial \beta}{\partial E}, \frac{\partial z}{\partial E} = r \frac{\partial \gamma}{\partial E} \quad (4.22)$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega}, \frac{\partial \beta}{\partial \Omega}, \frac{\partial \gamma}{\partial \Omega} \right) = (-\beta, \alpha, 0), \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \omega}, \frac{\partial \beta}{\partial \omega}, \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} \right) = (\alpha', \beta', \gamma'), \quad (4.24)$$

α', β', γ' - $\vec{r}_{\perp}^0$ ортының компоненттері.

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial i}, \frac{\partial \beta}{\partial i}, \frac{\partial \gamma}{\partial i} \right) = (\alpha'', \beta'', \gamma''), \quad (4.25)$$

осында $(\alpha'', \beta'', \gamma'') = \vec{R} = \vec{c}/c$ - жанасатын орбита жазықтығына перпендикуляр орты.

Егер $\vec{r}^0, \vec{r}_{\perp}^0, \vec{R}$ орттар арқылы анықталатын S, T, W координат жүйесін енгізгенде, матрица

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

x, y, z жүйеге байланысты S, T, W координат жүйесінің бағыттау косинустарының матрицасы болады. Сонда

$$\begin{vmatrix} S \\ T \\ W \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \cdot X + \begin{vmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{vmatrix} \cdot Y + \begin{vmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{vmatrix} \cdot Z \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \omega} &= rT, & \frac{\partial R}{\partial i} &= r \sin u \cdot W, \\
\frac{\partial R}{\partial \Omega} &= r(-\beta X + \alpha Y) = r(\cos i \cdot T - \cos u \sin i \cdot W)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i} \tilde{W}, \quad \frac{di}{dt} = \frac{r}{p} \cos u \tilde{W}, \quad \frac{dp}{dt} = 2r\tilde{T}, \tag{4.28a}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos \nu}{e} \tilde{S} + \frac{\sin \nu}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} - \frac{r}{p} \sin u \cot i \tilde{W}, \tag{4.28\eth}$$

$$\frac{de}{dt} = \sin \nu \tilde{S} + \left[\cos \nu + (\cos \nu + e) \frac{r}{p} \right] \tilde{T}, \quad (4.28\text{б})$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{r^2}{e\sqrt{\mu p}} \left[(eN \sin \nu - \cos \nu) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right], \quad (4.28\text{в})$$

осында

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W, \quad N = \int_0^\nu \frac{\cos \nu}{(1 + \cos \nu)^3} d\nu.$$

(4.28) теңдеулер – *жанасатын элементтері үшін Ньютон теңдеулері*.

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} + \frac{\cos \nu}{e} \tilde{S} - \frac{\sin \nu}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T}. \quad (4.29)$$